重 庆 大 学

学 生 实 验 报 告

实验课程名称＿＿＿＿＿＿数学实验＿＿＿＿＿＿

开课实验室＿＿＿＿数学实验中心 LD104＿＿＿＿

学　　　院 ＿大数据与软件学院＿年级＿2021 级＿专业班软件工程 X 班

学 生 姓 名＿＿XXX＿＿学　号＿＿2021XXXX＿＿

学 生 姓 名＿＿XXX＿＿学　号＿＿2021XXXX＿＿

开 课 时 间＿2022＿至＿2023＿学年第＿1＿学期

总 成 绩	

数 统 学 院 制

开课学院、实验室：数学与统计学院、LD104 实验时间 ：2022 年 10 月 30 日

<table>
<tr><td rowspan="2">课程名称</td><td rowspan="2">数学实验</td><td rowspan="2">实验项目名　称</td><td rowspan="2">数据拟合</td><td colspan="5">实验项目类型</td></tr>
<tr><td>验证</td><td>演示</td><td>综合</td><td>设计</td><td>其他</td></tr>
<tr><td>指导教师</td><td>XX</td><td>成　绩</td><td></td><td></td><td></td><td>√</td><td></td><td></td></tr>
</table>

题目 1

增加生产、发展经济所依靠的主要因素有增加投资、增加劳动力以及技术革新等，在研究国民经济产值与这些因素的数量关系时，由于技术水平不像资金、劳动力那样容易定量化，作为初步的模型，可认为技术水平不变，只讨论产值和资金、劳动力之间的关系。在科学技术发展不快时，如资本主义经济发展的前期，这种模型是有意义的。

用 Q，K，L 分别表示产值、资金、劳动力，要寻求的数量关系 $Q(K,L)$。经过简化假设与分析，在经济学中，推导出一个著名的 Cobb-Douglas 生产函数：

$$Q(K,L) = aK^{\alpha}L^{\beta},\quad 0<\alpha,\beta<1 \qquad (*)$$

式中 α，β，a 要由经济统计数据确定。现有美国马萨诸塞州 1900—1926 年上述三个经济指数的统计数据，如下表，试用数据拟合的方法，求出式（*）中的参数 α，β，a。

表 1

t	Q	K	L	t	Q	K	L
1900	1.05	1.04	1.05	1914	2.01	3.24	1.65
1901	1.18	1.06	1.08	1915	2.00	3.24	1.62
1902	1.29	1.16	1.18	1916	2.09	3.61	1.86
1903	1.30	1.22	1.22	1917	1.96	4.10	1.93
1904	1.30	1.27	1.17	1918	2.20	4.36	1.96
1905	1.42	1.37	1.30	1919	2.12	4.77	1.95
1906	1.50	1.44	1.39	1920	2.16	4.75	1.90
1907	1.52	1.53	1.47	1921	2.08	4.54	1.58
1908	1.46	1.57	1.31	1922	2.24	4.54	1.67
1909	1.60	2.05	1.43	1923	2.56	4.58	1.82
1910	1.69	2.51	1.58	1924	2.34	4.58	1.60
1911	1.81	2.63	1.59	1925	2.45	4.58	1.61
1912	1.93	2.74	1.66	1926	2.58	4.54	1.64
1913	1.95	2.82	1.68				

模型 1

用 Q，K，L 分别表示产值、资金、劳动力，要寻求的数量关系 $Q(K,L)$。经过简化假设与分析，在经济学中，推导出一个著名的 Cobb-Douglas 生产函数：

$$Q(K,L) = aK^{\alpha}L^{\beta},\quad 0<\alpha,\beta<1 \qquad (*)$$

由已知函数形式，利用 matlab 中的 lqscurvefit 函数，用最小二乘求解非线性曲线拟合（数据拟合）问题。

程序 1

Step1：建立函数 M 文件 curvefun.m；

```
function f=curvefun(x,p)
f=x(1)*(p(1,:).^x(2)).*(p(2,:).^x(3));
```

Step2：建立主程序 M 文件 main.m；

```
%清空命令行窗口内容
clc;
%清空工作区变量
clear;
%设置变量，利用lsqcurvefit函数求解
K=[1.04,1.06,1.16,1.22,1.27,1.37,1.44,1.53,1.57,2.05,2.51,2.63,2.74,...
   2.82,3.24,3.24,3.61,4.10,4.36,4.77,4.75,4.54,4.54,4.58,4.58,4.58,4.54;...
   1.05,1.08,1.18,1.22,1.17,1.30,1.39,1.47,1.31,1.43,1.58,1.59,1.66,...
   1.68,1.65,1.62,1.86,1.93,1.96,1.95,1.90,1.58,1.67,1.82,1.60,1.61,1.64];
L=[1.05,1.18,1.29,1.30,1.30,1.42,1.50,1.52,1.46,1.60,1.69,1.81,1.93,1.95,...
    2.01,2.00,2.09,1.96,2.20,2.12,2.16,2.08,2.24,2.56,2.34,2.45,2.58];
x0=[1,1,1];
x=lsqcurvefit('curvefun',x0,K,L)
```

Step3：绘图观察效果；

```
m=linspace(0,2.7,27);
n=linspace(0,2.7,27);
[M,N]=meshgrid(m,n);
q=x(1)*(M.^x(2)).*(N.^x(3));
surf(M,N,q);
xlabel('K');ylabel('L');zlabel('Q');
```

结果 1

Step1：从左到右依次为 a， α ， β 的值；

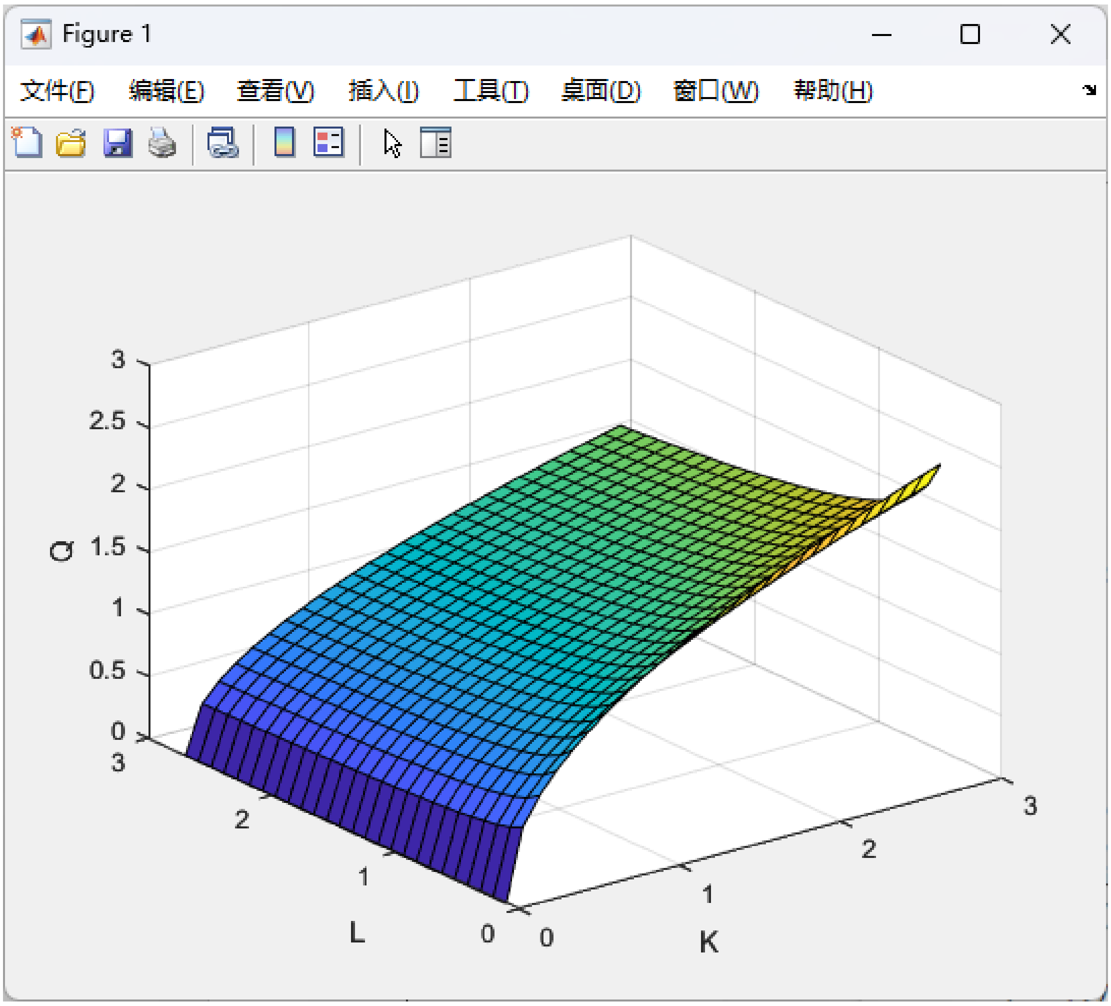
```
x =

    1.2246    0.4612   -0.1277
```

结论：经最小二乘法拟合可得，所求函数应为：

$$Q(K,L)=1.2246K^{0.4612}L^{-0.1277}$$

Step2：图形观察，z 坐标为 Q 的值；



题目 2

收集重庆市的人口数据，采用数据拟合预测 2025 年重庆市的人口数。

模型 2

（1）背景

由于人口不可能无限制增长，增长率会逐渐下降。这里简化地将增长率 r 看作人口 x 的减函数，即 r(x)=r-kx(r,k>0)，k 为待求系数。

搜集到重庆历年人口如表（单位：万）

年份	1952	1957	1962	1965	1970	1975	1978	1980
人口数（万）	1782.54	1992.20	1797.19	1974.89	2289.64	2522.59	2635.56	2664.79
1985	1990	1995	2000	2005	2010	2015	2020	2021
2768.26	2920.90	3001.77	3091.09	3169.16	3303.45	3371.84	3208.90	3212.40

（2）模型建立

用 x(t)表示 t 时刻的人口，X_m表示当前环境可以容纳的最大人口；

设 r(x)=r-kx(r，s>0)，r 为固有增长率，k 为待求系数；

指数增长模型为：

$$\frac{dx}{dt} = rx$$

其中 r(x)可由 r(x_m)=0 推导，则模型为：

$$\frac{dx}{dt} = r(x)x = rx(1 - \frac{x}{x_m})$$

最终得到：

$$x(t) = \frac{x_m}{(1 + (\frac{x_m}{x_0} - 1)e^{-rt})}$$

程序 2

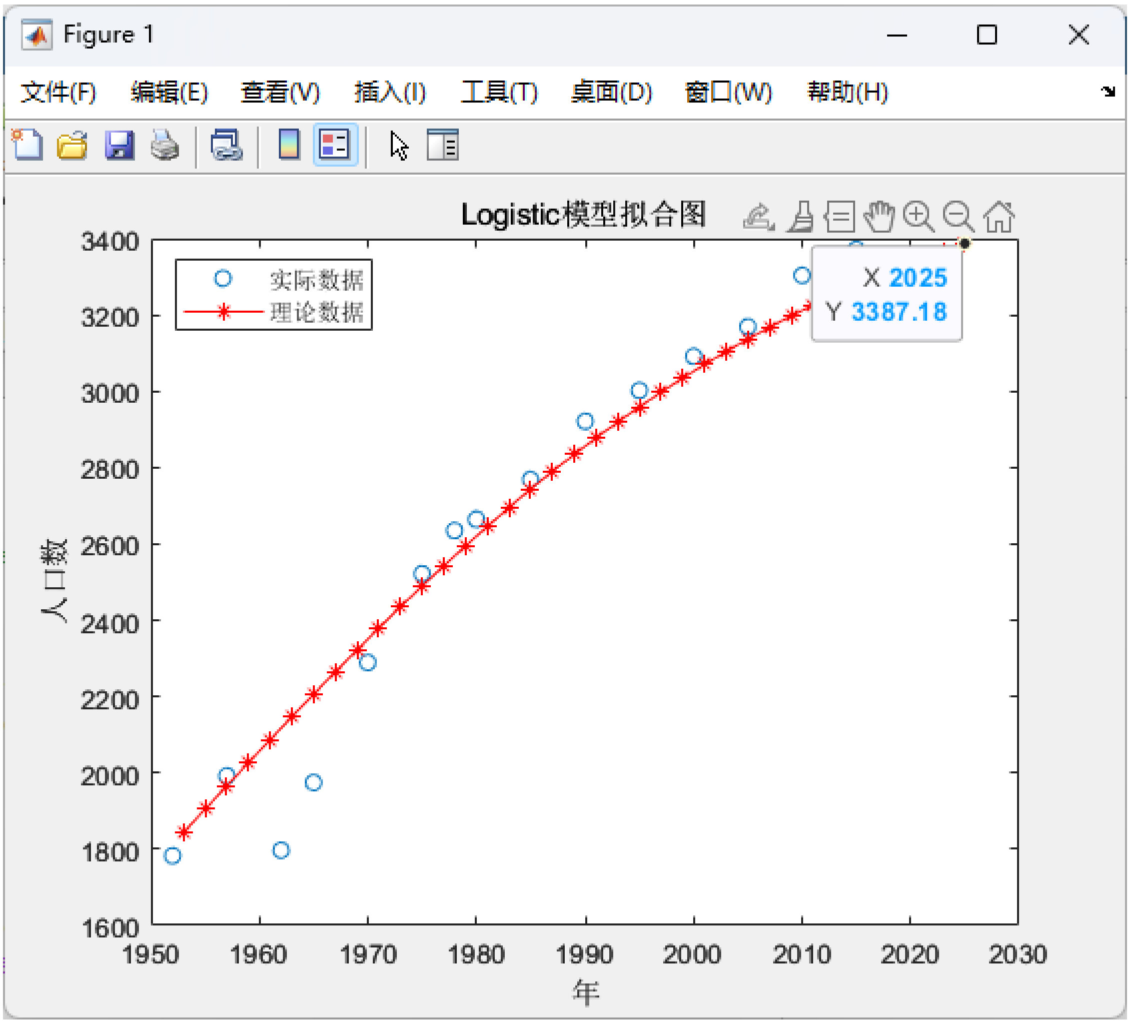
Step1：建立函数 M 文件 population.m；

```
function f=population(x,t)
f=x(1)./(1+(x(1)/1782.54-1)*exp(-x(2)*t));
```

Step2：建立主程序 M 文件 main.m；

```
%清空命令行窗口内容
clc;
%清空工作区变量
clear;
%录入数据，利用lsqcurvefit函数求解并绘图观察
t=[1952,1957,1962,1965,1970,1975,1978,1980,1985,1990,1995,2000,2005, ...
    2010,2015,2020,2021];
t1=[2:2:74];
p=[1782.54,1992.20,1797.19,1974.89,2289.64,2522.59,2635.56,2664.79, ...
    2768.26,2920.90 3001.77,3091.09,3169.16,3303.45,3371.84, ...
    3208.90 3212.40];
t=t-1951;
x0=[3211.35, 1.3];
x=lsqcurvefit('population',x0,t,p)
p1=population(x,t1);
plot(t+1951,p,'o',t1+1951,p1,'-r*')
title('Logistic模型拟合图')
xlabel('年');
ylabel('人口数');
legend('实际数据','理论数据')
```

结果 2



结论：由已知数据估计，到 2025 年时重庆市约有人口 3387.18 万。

题目 3

了解例证法的原理，并用例证法来证明几何定理。

模型 3

（1）背景

①例证法的原理：用解析几何的原理，可以把几何命题成不成立的问题转化为检验代数式是不是恒等式的问题。用一组未知数检验，在几何里相当于具体画一个图。这样，举例子来检验几何命题是不是成立就可以了，用许多组数值不大的例子可以，用一组很大数值的例子也可以。

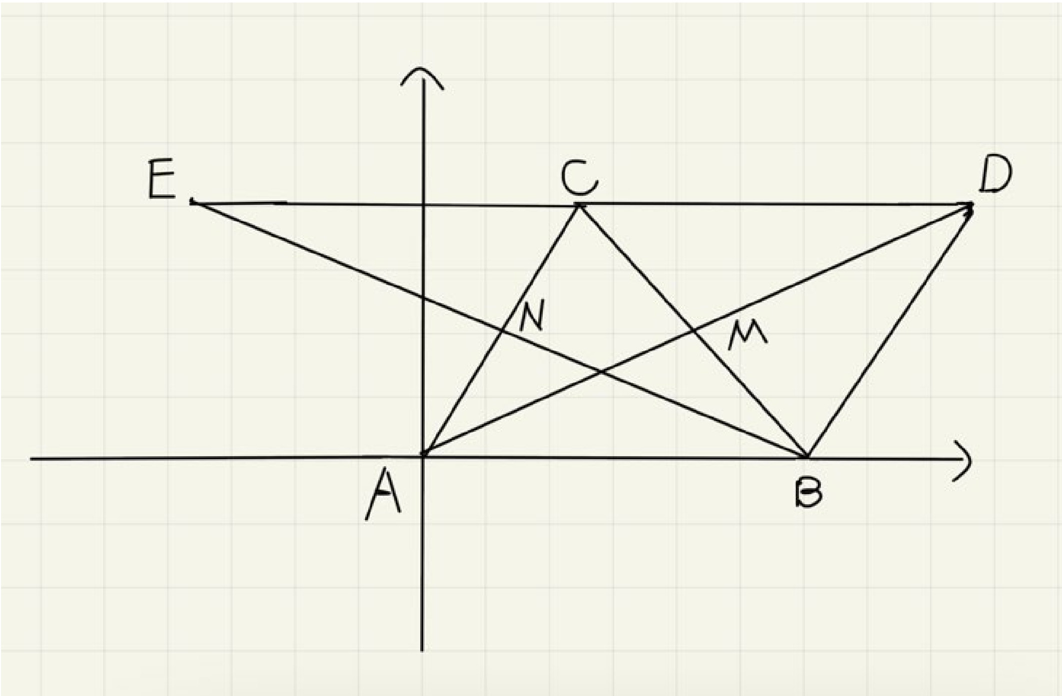
②几何定理：几何定理，属于数学领域。分为平面几何、解析几何。具体事例有勾股定理 余弦定理等。条目分为立体几何，三角形的六心以及重要定理等。下面以三角形内角和为 180° 为例。

（2）模型建立

首先将几何问题转化为代数问题，因其他三角形皆可通过平移、旋转、等比例放缩表示为同一形式的三角形，故为了方便表示，设三角形 ABC 的三个顶点分别为 A=(0,0)，B=(1,0)，C=(m,n)，即将 A 点设置为原点，AB 长度为单位长度“1”；

接下来对原问题进行转换，要证明三角形内角和为 180°，即证明三个内角拼在一起为一个平角，便可进一步转换为三点共线问题；

利用全等三角形的性质，取 AC 中点 N，连接并延长 BN 至点 E，使得 BN=EN，则∠CAB＝∠ACE，取 BC 中点 M，连接并延长至 D 点，使得 AM=DM，则∠CBA=∠BCD，如此便将三角形的三个内角拼到一起,这样只需证明 C、D、E 三点共线即可；



设 M=(x_1,x_2),N=(x_3,x_4),D=(x_5,x_6),E=(x_7,x_8),则由假设条件可得：

$$f_1 = x_1 - \frac{m+1}{2} = 0$$

$$f_2 = x_2 - \frac{n}{2} = 0$$

$$f_3 = x_3 - \frac{m}{2} = 0$$

$$f_4 = x_4 - \frac{n}{2} = 0$$

$$f_5 = x_5 - 2x_1 = 0$$

$$f_6 = x_6 - 2x_2 = 0$$

$$f_7 = x_7 - 2x_3 + 1 = 0$$

$$f_8 = x_8 - 2x_4 = 0$$

要证明的结论 C、D、E 三点共线即为：

$$g = (x_5 - m)(x_8 - n) - (x_7 - m)(x_6 - n) = 0$$

共有 10 个变元，其中 m、n 是自由变元，x_1~x_8为约束变元，当 m、n 确定时，x_1~x_8也都确定。

由方程组可以看出，m、n 的次数均不超过 1，要证 g 恒等于 0，只需要在变元 m、n 的一个 2x2 格拉姆矩阵上检验 g 是否等于 0 即可，可取(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)。

程序 3

（1）(m,n)=(0,0)时：

```
%清空命令行窗口内容
clc;
%清空工作区变量
clear;
%m,n赋初始值
m=0;
n=0;
%方程组求解
syms x1 x2 x3 x4 x5 x6 x7 x8;
f1=x1-0.5*(m+1);
f2=x2-0.5*n;
f3=x3-0.5*m;
f4=x4-0.5*n;
f5=x5-2*x1;
f6=x6-2*x2;
f7=x7-2*x3+1;
f8=x8-2*x4;
[x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8]=solve(f1,f2,f3,f4,f5,f6,f7,f8);
%算出g的值验证是否为0
g=(x5-m)*(x8-n)-(x7-m)*(x6-n)
```

（2）(m,n)=(0,1)时：

```
%清空命令行窗口内容
clc;
%清空工作区变量
clear;
%m,n赋初始值
m=0;
n=1;
%方程组求解
syms x1 x2 x3 x4 x5 x6 x7 x8;
f1=x1-0.5*(m+1);
f2=x2-0.5*n;
f3=x3-0.5*m;
f4=x4-0.5*n;
f5=x5-2*x1;
f6=x6-2*x2;
f7=x7-2*x3+1;
f8=x8-2*x4;
[x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8]=solve(f1,f2,f3,f4,f5,f6,f7,f8);
%算出g的值验证是否为0
g=(x5-m)*(x8-n)-(x7-m)*(x6-n)
```

（3） (m,n)=(1,0)时：

```
%清空命令行窗口内容
clc;
%清空工作区变量
clear;
%m,n赋初始值
m=1;
n=0;
%方程组求解
syms x1 x2 x3 x4 x5 x6 x7 x8;
f1=x1-0.5*(m+1);
f2=x2-0.5*n;
f3=x3-0.5*m;
f4=x4-0.5*n;
f5=x5-2*x1;
f6=x6-2*x2;
f7=x7-2*x3+1;
f8=x8-2*x4;
[x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8]=solve(f1,f2,f3,f4,f5,f6,f7,f8);
%算出g的值验证是否为0
g=(x5-m)*(x8-n)-(x7-m)*(x6-n)
```

（4） (m,n)=(1,1)时：

```
%清空命令行窗口内容
clc;
%清空工作区变量
clear;
%m,n赋初始值
m=1;
n=1;
%方程组求解
syms x1 x2 x3 x4 x5 x6 x7 x8;
f1=x1-0.5*(m+1);
f2=x2-0.5*n;
f3=x3-0.5*m;
f4=x4-0.5*n;
f5=x5-2*x1;
f6=x6-2*x2;
f7=x7-2*x3+1;
f8=x8-2*x4;
[x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8]=solve(f1,f2,f3,f4,f5,f6,f7,f8);
%算出g的值验证是否为0
g=(x5-m)*(x8-n)-(x7-m)*(x6-n)
```

结果 3

（1）(m,n)=(0,0)时：

```
g =

0
```

（2）(m,n)=(0,1)时：

```
g =

0
```

（3）(m,n)=(1,0)时：

```
g =

0
```

（4）(m,n)=(1,1)时：

```
g =

0
```

结论：由于 g 恒等于 0，则 C、D、E 三点共线，即三个内角之和为 180°，原几何定理得证。

分析

在本次实验中，我们进一步学习了 matlab 软件并利用其解决数据拟合问题。

首先，我们了解了拟合问题，学习了 lsqcurvefit 函数，利用题目给出的或自己收集的数据，用最小二乘求解非线性曲线拟合（数据拟合）问题，并结合图形更直观地感受到了数据拟合的效果。然后，在使用例证法证明几何定理时，结合例证法原理和其他数学方法，先构造出数学模型，再利用 matlab 带有的 solve 函数，解出方程组，并将数据代入目标函数，加以验证，得以证明三角形内角和等于 180°这一耳熟能详的几何定理。

通过本次实验的学习，我们的数学思维得到了进一步锻炼，并且通过 matlab 软件，利用计算机进行复杂但又快速的计算，能够解决更多我们人为难以解决的实际问题，受益无穷，希望在未来的学习中能收获更多。

备注：

1、**一门课程有多个实验项目的，应每一个实验项目一份，课程结束时将该课程所有实验项目内页与封面合并成一个电子文档上交。**